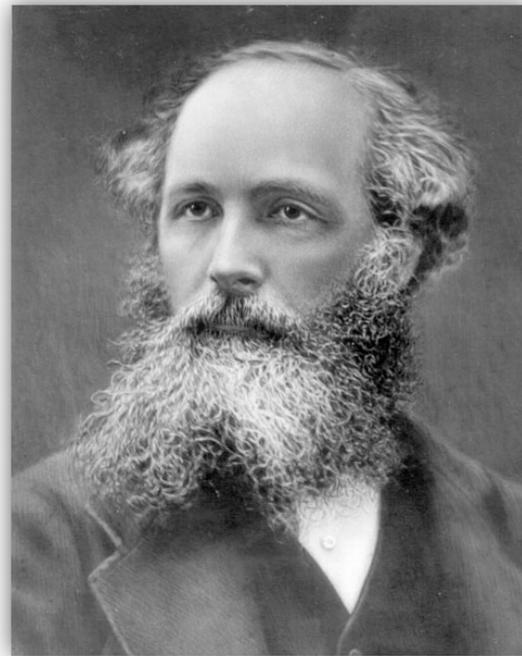


Kapitel 7: Maxwell-Gleichungen

7 Maxwell - Gleichungen	67
7.1 Der Verschiebungsstrom	67
7.2 Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen	69
7.3 Maxwell-Gleichungen in Materialien	70
7.4 Skalares Potential und Vektorpotential	70
7.4.1 Maxwell-Gleichungen und Potentiale	71
7.4.2 Eichtransformationen	72
7.4.3 Bedeutung der Potentiale	73



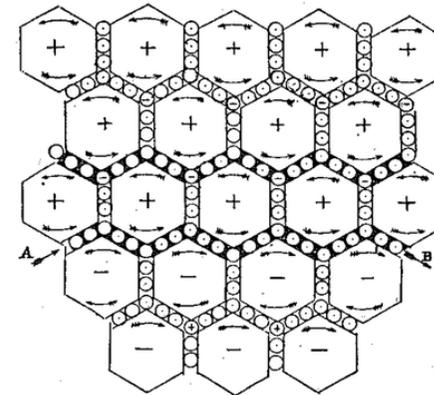
James Clerk Maxwell FRS FRSE was a Scottish scientist in the field of mathematical physics. His most notable achievement was to formulate the classical theory of electromagnetic radiation, bringing ... [Wikipedia](#)

1831–1879

Maxwells Äther

Heutzutage präsentieren wir die elektromagnetische Theorie in abstrakter Weise, doch ist dies nicht die Methode, die ihre Erfinder angewandt haben. Maxwell begann mit einem Modell des Äthers, das aus Wirbeln von submolekularer Größe zusammengesetzt war, die sich alle in derselben Richtung drehten, um so die Zirkulation des Magnetfeldes hervorzurufen. Im Geiste seiner Zeit nahm er das Modell sehr ernst.

Es hat mir große Schwierigkeiten bereitet, mir die Existenz von Wirbeln in einem Medium vorzustellen, die sich nebeneinander in der selben Richtung um parallele Achsen drehen. Die angrenzenden Teile aufeinander folgender Wirbel müssen sich in entgegengesetzten Richtungen drehen. So ist es schwierig zu verstehen, wie die Bewegung eines Teiles des Mediums mit einer entgegengesetzten Bewegung eines Teiles, der damit in Kontakt steht, koexistieren und sie sogar hervorrufen kann.



Die einzige Vorstellung, die mir dabei geholfen hat, diese Art von Bewegung zu veranschaulichen, ist jene von Wirbeln, die durch eine Schicht von Teilchen getrennt sind, von denen sich jedes um seine eigene Achse in der zur Wirbelrichtung entgegengesetzten Richtung dreht, so daß die Berührungsoberflächen der Teilchen und der Wirbeln die gleiche Bewegung haben. In mechanischen Geräten, in denen sich zwei Räder in der gleichen Richtung drehen sollen, wird ein drittes Rad zwischen ihnen angebracht, das mit beiden im Eingriff steht und dieses Rad wird ein Zwischenrad genannt. Die Hypothese über die Wirbel, die ich vorschlagen möchte, ist jene einer Schicht von Teilchen, die als Zwischenräder wirken und zwischen jedem Wirbel und seinem Nachbarn angebracht sind, so daß jeder Wirbel die Tendenz hat, sich in der gleichen Richtung wie seine Nachbarn zu drehen.

Die Zwischenräder waren Elektrizitätspartikel. Maxwell leitete die elektromagnetischen Gleichungen auf der Grundlage dieser Vorstellungen ab.

Dieses Bild dient dazu, die tatsächlichen mechanischen Zusammenhänge zwischen den bekannten elektromagnetischen Phänomenen darzustellen. Ich wage daher zu behaupten, daß für alle, die den vorläufigen Charakter dieser Hypothese verstehen, die Hypothese eher eine Hilfe als ein Hindernis sein wird, wenn sie nach der wahren Interpretation der Erscheinungen suchen.

7 Maxwell - Gleichungen

7.1 Der Verschiebungsstrom

Das Faraday'sche Gesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

beschreibt, dass die zeitliche Veränderung des magnetischen Flusses ein "wirbelförmiges" \vec{E} -Feld erzeugt (und umgekehrt). Im Folgenden wird gezeigt, dass dies auch anders herum gelten muss:

- Die zeitliche Änderung von \vec{E} -Feldern erzeugt \vec{B} -Felder.

Im Detail betrachtet man einen Kondensator beim Aufladen und berechnet das Magnetfeld um eines der Zuleitungskabel.

$$\underbrace{\oint \vec{B} d\vec{s}}_{\text{Integral über Kreisbahn}} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j} d\vec{A}}_{\text{Integral über Kreisfläche}} = \mu_0 I \quad (7.1)$$

Man kann, bei gleicher Kreisbahn als Rand der Fläche, aber auch eine Fläche wählen, die keine Ebene ist, sondern mitten durch den Kondensator verläuft. Da mitten zwischen den Kondensatorplatten kein Strom fließt, gilt

$$\underbrace{\oint \vec{B} d\vec{s}}_{\text{Integral über Kreisbahn}} = \underbrace{\mu_0 \iint \vec{j} d\vec{A}}_{\text{Integral mitten durch Kondensator}} = 0 \quad (7.2)$$

Mathematisch gibt es also einen Widerspruch zwischen diesen beiden Gleichungen. Maxwell interpretierte dies so, dass das Amperé'sche Gesetz nicht vollständig sein kann, sondern dass das sich im Kondensator aufbauende \vec{E} -Feld die Funktion des Stroms übernimmt. Mit der Kapazität $C = \epsilon_0 A/d$ gilt für die Ladung im Kondensator

$$Q = C U = \epsilon_0 \frac{A}{d} U = \epsilon_0 A E$$

Daraus folgt

$$I = \partial_t Q = \epsilon_0 A \partial_t E$$

Damit definierte Maxwell die "Verschiebungsstromdichte" als

$$j_V = \frac{I}{A} = \epsilon_0 \partial_t E$$

Dies ist ein symbolischer Strom, der im Kondensator nur durch die zeitliche Änderung des \vec{E} -Feldes gegeben ist. Addiert man nun die tatsächliche, reale Stromdichte j und die Verschiebungsstromdichte j_V , so erhält man die neue Form des Amperé'schen Gesetzes.

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 \iint (\vec{j} + \vec{j}_V) d\vec{A} \quad (7.3)$$

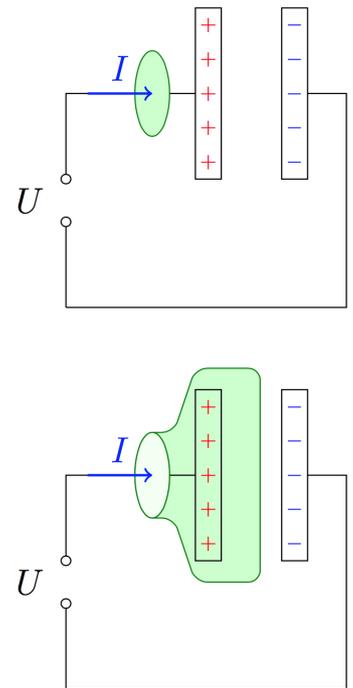


Abb. 7.1
Integrationswege zur Ableitung des Verschiebungsstroms.

und damit

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A} \quad (7.4)$$

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in integraler Form

Experimentell kann man auch tatsächlich in einem Plattenkondensator, der mit Wechselstrom auf- und entladen wird, ein Magnetfeld nachweisen. Man stellt dafür eine Ringspule mit Magnetkern in den Kondensator. Das sich im Kondensator auf- und abbauende \vec{E} -Feld erzeugt ein wirbelförmiges \vec{B} -Feld, das in der Ringspule verläuft und dadurch in den Spulenwicklungen eine Spannung induziert. Der Effekt ist allerdings durch die zusätzliche Konstante $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} C^2 / (Nm^2)$ sehr klein. Er spielt aber für elektromagnetische Wellen eine entscheidende Rolle.

Die Notwendigkeit für diese Erweiterung des Ampere'schen Gesetzes kann man auch aus der Ladungserhaltung folgern. Zunächst kann man sehen, dass das Ampere'sche Gesetz in der Form, in der es in der Magnetostatik benutzt wurde,

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

nicht allgemein gültig sein kann. Wendet man nämlich die Divergenz auf diese Gleichung an, so findet man

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \vec{j}$$

Die linke Seite mit $\nabla(\nabla \times \dots)$ ist mathematisch für alle Vektorfelder immer Null. Die rechte Seite $\nabla \vec{j}$ ist aber wegen der Ladungserhaltung $\nabla \vec{j} = -\partial_t \rho$ nur dann Null, wenn sich die Ladungsdichte zeitlich nirgendwo ändert, also im statischen Fall. Z.B. beim Aufladen eines Kondensators gilt das aber nicht. Benutzt man das Coulomb-Gesetz $\nabla \vec{E} = \rho / \epsilon_0$, so ergibt sich aus der Ladungserhaltung

$$\nabla \vec{j} = -\partial_t \rho = -\partial_t (\epsilon_0 \nabla \vec{E}) = -\nabla (\epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \quad (7.5)$$

Ladungserhaltung und Coulomb-Gesetz erzwingen also, dass man $\nabla \times \vec{B}$ nur schreiben kann als

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \partial_t \vec{E}) \quad (7.6)$$

Magnetische Wirbelfelder werden also von Strömen und zusätzlich von zeitlich veränderlichen elektrischen Feldern hervorgerufen. Anwendung des Stokes'schen Integralsatzes ergibt

$$\oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A} \quad (7.7)$$

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in differentieller Form

Ampere-Maxwell'sches Gesetz in integraler Form

7.2 Zusammenfassung der Maxwell-Gleichungen

Aus den bisher diskutierten Experimenten ergeben sich die 4 Maxwellgleichungen und die Lorentzkraft als Grundlage der klassischen Elektrodynamik:

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Gauß} \quad (7.8)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (7.9)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \text{Faraday} \quad (7.10)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad \text{Ampere-Maxwell} \quad (7.11)$$

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad \text{Lorentzkraft} \quad (7.12)$$

Maxwell-Gleichungen in differentieller Form

- 7.8 Ladungen sind Quellen des E -Feldes.
 7.9 B -Felder haben keine Quellen.
 7.10 E -Felder werden von variablen B -Feldern erzeugt.
 7.11 B -Felder werden von Strömen und von variablen E -Feldern erzeugt.
 7.12 E - und B -Felder üben Kräfte auf Ladungen aus.

- Die Erhaltung der elektrischen Ladung ist in diesen Gleichungen bereits enthalten. Wendet man die Divergenz auf Gleichung 7.11 an

$$\nabla(\nabla \times \vec{B}) = 0 = \mu_0(\nabla \vec{j} + \epsilon_0 \partial_t \nabla \vec{E})$$

und benutzt Gleichung 7.8, so folgt

$$\boxed{\nabla \vec{j} + \partial_t \rho = 0} \quad (7.13)$$

Ladungserhaltung

- Die Maxwell-Gleichungen ändern ihre Form nicht bei einer Lorentz-Transformation, wenn Zeit und Ortskoordinaten sowie die Felder \vec{E} und \vec{B} adäquat transformiert werden. Sie gehorchen also den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie.
- Durch Anwendung des Gauß'schen oder Stokes'schen Satzes erhält man die Maxwell-Gleichungen in integraler Form. Man sollte beachten, dass sich die integralen Formen aus den differentiellen ergeben, wenn man die zeitlichen Ableitungen mit den Integralen vertauschen kann. Dies ist nur dann der Fall, wenn die Integralgrenzen nicht zeitabhängig sind. Dies schränkt die Anwendbarkeit der angegebenen Integralformen ein.

Maxwell-Gleichungen in
differentieller und inte-
graler Form

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \oiint \vec{E} d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (7.14)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (7.15)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (7.16)$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E} \quad \oint \vec{B} d\vec{s} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \iint \vec{E} d\vec{A} \quad (7.17)$$

7.3 Maxwell-Gleichungen in Mate- rialien

Die Ladungen, Ströme und Felder in den Gleichungen 7.14 etc. berücksichtigen bereits Effekte durch Materialien, wenn man in ρ und \vec{j} Ladungen und Ströme einberechnet, die durch Polarisation \vec{P} und Magnetisierung \vec{M} des Materials entstehen. Möchte man die Maxwell-Gleichungen nur mittels der äußeren (freien) Ladungen q_{frei} und Ströme I_{frei} berücksichtigen, so müssen statt der Felder \vec{E} und \vec{B} die Felder \vec{D} und \vec{H} benutzt werden. Mit den Definitionen

$$\vec{D} \equiv \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \vec{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \quad (7.18)$$

gilt in Materialien

$$\nabla \vec{D} = \rho_{frei} \quad \oiint \vec{D} d\vec{A} = q_{frei} \quad (7.19)$$

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad \oiint \vec{B} d\vec{A} = 0 \quad (7.20)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} \quad \oint \vec{E} d\vec{s} = -\partial_t \iint \vec{B} d\vec{A} \quad (7.21)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{frei} + \partial_t \vec{D} \quad \oint \vec{H} d\vec{s} = I_{frei} + \partial_t \iint \vec{D} d\vec{A} \quad (7.22)$$

Maxwell-Gleichungen in
Materie

In Materialien, in denen die Polarisation \vec{P} linear von \vec{E} und die Magnetisierung \vec{M} linear von \vec{B} abhängt, können \vec{D} , \vec{H} wiederum durch \vec{E} , \vec{B} ausgedrückt werden.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B} \quad (7.23)$$

Dies gilt auch für obige Maxwell-Gleichungen, solange das Material zudem homogen ist, so dass μ_r und ϵ_r nicht explizit vom Ort abhängen.

7.4 Skalares Potential und Vektor- potential

7.4.1 Maxwell-Gleichungen und Potentiale

Die Maxwell-Gleichungen stellen ein System gekoppelter Differentialgleichungen dar. Nimmt man die Ladungsdichte ρ und Stromdichte \vec{j} als gegeben an, so werden die sechs Komponenten von \vec{E} und \vec{B} durch die 8 Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \nabla \vec{B} &= 0 \\ \nabla \times \vec{E} &= -\partial_t \vec{B} & \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \vec{E}\end{aligned}$$

bestimmt. Die \vec{E} - und \vec{B} -Felder sind also nicht unabhängig. Es gibt nicht nur eine elektrische Wechselwirkung und eine magnetische Wechselwirkung, sondern nur eine kombinierte, elektromagnetische Wechselwirkung.

Man sollte also zunächst versuchen, dieses überbestimmte System auf weniger Komponenten zu reduzieren. In einem ersten Schritt wird die Anzahl der Gleichungen von 8 auf 4 reduziert und die Anzahl der Feldkomponenten von 6 auf 4. Dies geschieht durch die Einführung der Potentiale.

Ansatzpunkt ist, dass die beiden homogenen Gleichungen $\nabla \vec{B} = 0$ und $\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$ nicht von Ladungen und Strömen abhängen. Man konstruiert daher Potentiale so, dass diese homogenen Gleichungen automatisch erfüllt sind.

Jedes Vektorfeld ist durch die Angabe von Rotation und Gradient vollständig bestimmt. Wegen $\nabla \vec{B} = 0$ kann man daher das Magnetfeld vollständig auf die Rotation eines Vektorpotentials \vec{A} zurückführen,

$$\boxed{\vec{B} = \nabla \times \vec{A}} \quad (7.24)$$

Damit ist die eine homogene Gleichung automatisch erfüllt, denn für jedes Feld \vec{A} gilt

$$\nabla \vec{B} = \nabla(\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Setzt man dies in die zweite homogene Gleichung ein,

$$\nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B} = -\partial_t(\nabla \times \vec{A})$$

und vertauscht die Zeit- und Ortsableitungen, so folgt

$$\nabla \times (\vec{E} + \partial_t \vec{A}) = 0$$

Für den Ausdruck in der Klammer verschwindet die Rotation; er kann daher komplett durch eine Divergenz beschrieben werden,

$$\vec{E} + \partial_t \vec{A} = -\nabla \varphi$$

oder

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A}} \quad (7.25)$$

Im Fall der Elektrostatik ($\partial_t \vec{A} = 0$) ist dies das bereits diskutierte Potential in Gleichung 2.11. Durch die beiden Potentialgleichungen

Vektor-Potential \vec{A}

Skalares Potential φ

7.24 und 7.25 sind die beiden homogenen Maxwell-Gleichungen automatisch erfüllt.

Nun kann man \vec{E} und \vec{B} in den beiden inhomogenen Maxwell-Gleichungen durch die Potentiale ersetzen. Die Gleichung $\nabla \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ ergibt

$$\boxed{\nabla^2 \varphi + \partial_t(\nabla \vec{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (7.26)$$

Mit

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

folgt für die letzte Gleichung

$$\boxed{(\nabla^2 \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \vec{A}) - \nabla(\nabla \vec{A} + \epsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi) = -\mu_0 \vec{j}} \quad (7.27)$$

Diese Gleichungen in 7.26 und 7.27 enthalten die gleiche Information wie die Maxwell-Gleichungen. Es sind aber nur noch 4 Feld-Komponenten (φ, \vec{A}) aus 4 Gleichungen zu bestimmen.

7.4.2 Eichtransformationen

Die messbaren Felder \vec{E} und \vec{B} müssen bei gegebenem ρ, \vec{j} eindeutig bestimmt sein. Dies gilt aber nicht für die Potentiale, denn diese sind nicht direkt messbar. Insbesondere kann man die Potentiale so "eichtransformieren", dass sich \vec{E} und \vec{B} nicht ändern. Diese Eigenschaft einer unmessbaren Größe ist die Grundlage der theoretischen Ableitung der Maxwell-Gleichungen.

Eine Eichtransformation ändert die Potentiale,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' \quad \varphi \rightarrow \varphi'$$

ohne dass sich die zugehörigen Messgrößen \vec{E}, \vec{B} ändern,

$$\vec{E} = \vec{E}' \quad \vec{B} = \vec{B}'$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla \lambda \quad \varphi' = \varphi - \partial_t \lambda$$

Hierbei ist λ eine beliebige skalare Funktion $\lambda(\vec{r}, t)$. Wichtig ist, dass \vec{A} und φ simultan mit dem gleichen λ transformiert werden. Einsetzen zeigt, dass die Messgrößen tatsächlich unverändert bleiben¹³.

Es gibt unendlich viele mögliche Eichungen. Die Wahl der praktischsten Eichung hängt von dem konkreten Problem ab.

¹³

$$\vec{B}' = \nabla \times \vec{A}' = \nabla \times \vec{A} + \underbrace{\nabla \times (\nabla \lambda)}_{=0} = \vec{B}$$

$$\vec{E}' = -\nabla \varphi' - \partial_t \vec{A}' = -\nabla \varphi + \nabla \partial_t \lambda - \partial_t \vec{A} - \partial_t \nabla \lambda = -\nabla \varphi - \partial_t \vec{A} = \vec{E}$$

Coulomb-Eichung Die Messgröße $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ legt nur die Rotation, aber nicht die Divergenz von \vec{A} fest. In der Coulomb-Eichung wählt man¹⁴

$$\nabla \vec{A} = 0$$

Gleichung 7.26 ergibt dann die Poisson-Gleichung,

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Die andere Potentialgleichung Gleichung 7.27 wird aber nur im magnetostatischen Fall ($\partial_t \vec{A} = 0$) einfach.

Lorentz-Eichung Hierfür wählt man

$$\nabla \vec{A} = -\epsilon_0 \mu_0 \partial_t \varphi \quad (7.28)$$

Damit erhält man aus Gleichung 7.26

$$\boxed{(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2) \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (7.29)$$

und aus Gleichung 7.27

$$\boxed{(\nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2) \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}} \quad (7.30)$$

Bei gegebenem ρ, \vec{j} sind dies 4 unabhängige, entkoppelte Wellengleichungen für die 4 Komponenten von \vec{A}, φ . Es ist viel einfacher, erst diese Gleichungen zu lösen und daraus \vec{E}, \vec{B} zu bestimmen als direkt die Maxwell-Gleichungen zu benutzen.

In der Klammer steht der sogenannte D'Alembert-Operator

$$\boxed{\square = \nabla^2 - \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2} \quad (7.31)$$

der allgemein die Ausbreitung von Wellen beschreibt. Die Wellengeschwindigkeit ist hier die Lichtgeschwindigkeit

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}} \quad (7.32)$$

Im D'Alembert-Operator stehen Ort- und Zeitableitungen gleichberechtigt, wie erforderlich für die spezielle Relativitätstheorie.

7.4.3 Bedeutung der Potentiale

Es ist eine interessante Frage, ob die Felder \vec{E}, \vec{B} oder die Potentiale φ, \vec{A} die fundamentalen Größen im Elektromagnetismus sind.

- Messgrößen sind die Felder \vec{E}, \vec{B} .

¹⁴Konkret wählt man die beliebige Funktion λ so, dass $\nabla^2 \lambda = \nabla \vec{A}'$, denn damit folgt

$$\nabla \vec{A} = \nabla \vec{A}' - \nabla^2 \lambda = 0$$

Wellengleichungen der Potentiale

Lichtgeschwindigkeit c

7.4 Skalares Potential und Vektorpotential

- Die Felder \vec{E} , \vec{B} beinhalten unnötig viele Feldkomponenten, die Potentiale nicht.
- Die Potentiale bilden einen Vierervektor $A^\mu = (\varphi, \vec{A})$, mit dem der Elektromagnetismus relativistisch invariant formuliert werden kann.
- In den Grundgleichungen der Quantenmechanik geladener Teilchen erscheinen direkt die Potentiale φ, \vec{A} .
- Photonen als Quanten des elektromagnetischen Feldes sind Anregungen der Potentiale φ, \vec{A} .
- Postuliert man eine Eichfreiheit der Potentiale, so lassen sich daraus die Maxwellgleichungen einschließlich Erhaltung der elektrischen Ladung ableiten. Das Ergebnis stimmt mit allen Experimenten überein.